MUCIN

MARZO - JUNIO 2024 | Edición VIII
ISSN: 2954-4416

Jorge Nelson Tejada Campos
jtejada@unc.edu.pe
Universidad Nacional de Cajamarca
http://orcid.org/0000-0002-5149-9599
Cajamarca-Perú

Juana Dalila Huacha Álvarez
dalilah@unc.edu.pe
Universidad Nacional de Cajamarca
https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0002-8285-6173
Cajamarca-Perú

Idelso Alamiro Lozano Malca
idelso.lozano@upn.edu.pe
Universidad Privada del Norte
https://orcid.org/0000-0001-9293-8992
Cajamarca-Perú

Etelvina Pérez Lucano
eteperez1@gmail.com
Institución Educativa N° 82949 "Belén"-Cajamarca
https://orcid.org/0000-0001-8748-3516
Cajamarca-Perú

Flor de María Huacha Álvarez
flomaha@gmail.com
Institución Educativa "Cristo Rey-Marista
https://orcid.org/0009-0008-3668-6565
Cajamarca-Perú

FORMALIZANDO LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS COMO SISTEMAS MATEMÁTICOS MEDIANTE LA YUPANA Y LA CHAKANA

FORMALIZING ARITHMETIC OPERATIONS AS MATHEMATICAL SYSTEMS THROUGH YUPANA AND CHAKANA

Resumen
El objetivo del estudio fue formalizar las operaciones aritméticas como sistemas matemáticos mediante la Yupana y la Chakana consiste en diseñar axiomáticamente la adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales como sistemas matemáticos usando la Yupana, la Chakana y sus aplicaciones al proceso enseñanza aprendizaje en los primeros grados de educación básica regular. Ambos instrumentos son símbolos emblemáticos de la civilización Inca; el método Tawa Pukllay es el referente teórico inicial para la Yupana; en cambio, la experiencia directa en talleres con docentes y estudiantes permite derivar los fundamentos científicos con la Chakana, confirmando en teoría y práctica resultados exitosos, válidos, confiables que configuran la propuesta teórica y sus estrategias didácticas originales e innovadoras relacionadas con juegos mentales complejos para aprender matemática. Se ha elaborado términos no definidos, axiomas, teoremas, definiciones, lenguaje propio, aplicaciones para cada objeto; también, se han deducido valiosas conclusiones didácticas para optimizar el aprendizaje de la matemática en los primeros grados de escolaridad.

Palabras Clave: Yupana, Chakana, formalización, sistema matemático.

Sugerencia como citar:
Tejeda, J. N., Huacha, J. D., Lozano, I. A., Pérez, E., & Huacha, F., (2024) Formalizando las operaciones aritméticas como sistemas matemáticos mediante la Yupana y la Chakana. Revista: Mundo Científico Internacional. Volumen 8.pág. 51-72
https://mucin.nelkuali.com/

Recibido: 13/02/2024
Aprobado: 10/03/2024
Publicado: 31/03/2024

MUNDO CIENTÍFICO INTERNACIONAL (MUCIN)

MUNDO CIENTÍFICO INTERNACIONAL (MUCIN), año 1, No.1, Octubre 2021, Publicación cuatrimestral, editada por: Ma. Elizabeth Islas León, Calle Noria SN Esq., Art. 3ro., Fracc. Constitución, C.P. 42080, Pachuca, Hidalgo, Tel. +52 (771) 1533478, https://mucin.nelkuali.com/, articuloscientificos@ceecph.com, Editor responsable: Ma. Elizabeth Islas León, Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. "04-2022-053113074300-102", ISSN: 2954-4416, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Unidad de Informática del Centro de Evaluación Educativo y de Competencias Profesionales de Hidalgo, CEECPH, S. C., Ma. Elizabeth Islas León, Calle Noria SN Esq., Art. 3ro. Fracc. Constitución, C.P. 42080, Pachuca, Hidalgo.

Abstract
The purpose of the study " Formalizing arithmetic operations as mathematical systems by means of the Yupana and the Chakana" is to axiomatically design addition, subtraction, multiplication and division of natural numbers as mathematical systems using the Yupana, the Chakana and their applications to the teaching-learning process in regular basic education. Both instruments are emblematic symbols of the Inca Civilization; the Tawa Pukllay Method is the starting theoretical reference for the Yupana; on the other way, the direct experience in workshops with teachers and students allows to derive the scientific fundamentals with the Chakana, confirming in theory and practice successful, valid, reliable results that configure the theoretical proposal and its original and innovative didactic strategies related to complex mental games to learn mathematics. Undefined terms, axioms, theorems, definitions, specific language, applications for each object were developed; also, valuable didactic conclusions were deduced to maximize the learning of mathematics in the first grades of schooling.
Keywords: Yupana, chakana, formalization, mathematical system

Introducción

El ensayo “Formalizando las operaciones aritméticas como sistemas matemáticos mediante la Yupana y la Chakana” fue elaborado integrando dinámicamente dos elementos esenciales: a) la práctica del proceso enseñanza aprendizaje de las operaciones aritméticas en los primeros grados de escolaridad, utilizando como recurso didáctico la Yupana (instrumento para contar) y la Chakana (Cruz Andina) con un enfoque de rescate cultural e histórico de saberes de la cultura Inca, y b) la matemática formal, como cuerpo teórico propio enunciado como sistema formal organizado. En este contexto, el objetivo consiste en diseñar axiomáticamente las cuatro operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales como sistemas matemáticos usando la Yupana y la Chakana en el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática durante los primeros grados de nivel primaria de educación básica regular.

Como resultado de la reflexión acerca de la aplicación concreta de ambos materiales educativos en los talleres con docentes y estudiantes, se identifica procesos de aprendizaje de las operaciones aritméticas que desarrollan conocimientos, habilidades y valores como: cada estudiante asume la actividad como un juego mental de alto nivel donde el dominio del sistema decimal no es requerido, toma sus propias decisiones sobre el orden de sus operaciones, utiliza material concreto para aplicar principios matemáticos abstractos de alto nivel de complejidad, dinamiza ambas manos, trabaja en equipo, resuelve operaciones aritméticas complejas, aprende en forma divertida, entre otros.

Un sistema matemático queda formulado si reúne condiciones esenciales como: términos no definidos, axiomas, teoremas, corolarios, lenguaje propio para su formalización, definiciones, organización lógica del sistema; además, los axiomas deben ser independientes unos de otros. En cada sistema que se propone, los términos no definidos son objetos materiales concretos, manipulables; los axiomas y teoremas se visualizan, las secuencias de operaciones se observan y realizan con objetos físicos (fichas) siguiendo un orden lógico argumentado que considere pertinente el usuario de manera autónoma e independiente. Estos procesos se asumen en un enfoque de juego mental complejo de alto nivel, aplicando un enfoque integral distinto al pensamiento matemático basado del mundo occidental. Para evidenciar la originalidad de la propuesta, después de la exposición de cada sistema formalizado se propone casos específicos ilustrativos de aplicación de tales operaciones.

Los sistemas matemáticos propuestos tienen particularidades importantes: a) sus términos no definidos son materiales concretos, accesible a los sentidos y a la manipulación, b) el lenguaje formal utilizado permitirá elaborar programas computarizados para generar tecnología informática innovadora utilizable en la ciencia y en la enseñanza, esta tarea está prevista en próximas investigaciones, c) la secuencia lógica de aplicaciones lo decide el usuario de modo autónomo, pueden existir tantos procesos cuantas personas participan en una misma operación aritmética, d) los procesos de razonamiento son concretos según la ubicación de fichas en espacios específicos de cada sistema, en ningún momento se requiere apoyo del pensamiento matemático de la cultura occidental.

Además de la importancia como propuesta científica al servicio de la didáctica de la matemática, es relevante porque ayuda al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, dado que ambos instrumentos educativos ofrecen de forma concreta y visual oportunidades para comprender conceptos abstractos, desarrollar el pensamiento matemático, la generación autónoma de algoritmos, patrones y relaciones. Por otro lado, ayuda a la recuperación científica, histórica y cultural de las civilizaciones antiguas peruanas (cultura inca), valorando la importancia de la matemática en diferentes culturas y contextos históricos.

El ensayo se enmarca desde una vertiente de la matemática desarrollada en la cultura incaica usando la Yupana y la Chakana como instrumentos para los procesos de enseñanza y aprendizaje implementados en los Yachaywasi (Casa del saber). Ambos materiales didácticos vislumbran que las civilizaciones antiguas aprendían con facilidad operaciones aritméticas necesarias en la administración del comercio (trueque), la economía, agricultura, caza, pesca, etc. El estudio se fundamenta en la etnomatemática y en la enculturación matemática, además de los conceptos primigenios de los dos instrumentos:

La etnomatemática como teoría, práctica, ciencia y enseñanza en culturas nativas

La etnomatemática desarrollada por D'Ambrosio se refiere al conocimiento y práctica del quehacer matemático en culturas nativas. El concepto integra en forma holística elementos como plan de estudios, condiciones sociales, prácticas culturales, tradiciones y costumbres para la educación matemática configurada como un programa de investigación en la historia y filosofía de las matemáticas con implicaciones pedagógicas, sustentadas en un conjunto de saberes producidos o asimilados por un grupo sociocultural autóctono cuyos elementos esenciales son: contar, medir, organizar el espacio y el tiempo, diseñar, estimar e inferir, vigentes en su propio contexto (Scott, 2021).

La etnomatemática es fundamental para el análisis histórico integrando sus aportes a la matemática mundial, en concordancia con demandas de carácter social y psicológico, que justifican rescatar las raíces tradicionales de la matemática nativa. Existen fuentes disponibles precolombinas principalmente en las civilizaciones Azteca, Maya e Inca, cuyos procesos, saberes y prácticas deberían estar en el currículo escolar, construyendo aprendizajes producto de discusiones y consensos sobre la naturaleza del conocimiento matemático enfatizando la historia, la filosofía y la cognición más allá de las que tradicionalmente se centran en la historia científica universal, olvidando los aportes propios que se mantienen en la vida cotidiana del saber andino.

La enculturación matemática

Bishop (1988), propone una nueva concepción de las matemáticas que reconozca y demuestre su relación con la cultura – como producto cultural, cuyas actividades sociales se relacionan con el entorno, estimulando conceptos y valores culturales subyacentes a las matemáticas–, es la génesis cultural de las ideas matemáticas, como un fenómeno pancultural que existe en todas las culturas a través del tiempo por todas las sociedades.

Para el autor citado todos los pueblos han generado conocimientos matemáticos realizando seis tipos de actividades: *1) Contar*: En actividades como: comercio, empleo, propiedad, etc. Los números se anotan de maneras diferentes en distintas sociedades: muescas, trazos, jeroglíficos, ábacos, yupanas, chakanas, quipus; *2) Localizar*: Mediante proposiciones como: en, sobre, tras, bajo. Usando sistemas como: puntos cardinales, ángulos, distancias, coordenadas, etc.; *3) Medir*: En actividades como: comparar, ordenar, cuantificar; utilizando unidades de medida como: codo, dedo, pie, palmo, paso, brazo, etc. Construyendo ideas como "más que" y "menos que". *4) Diseñar.* Implica transformar una parte natural en otra cosa es el plan o forma imaginada, que relaciona la realidad con un propósito abstracto. *5) Jugar.* La competición lúdica es un impulso social, tan antiguo como la cultura misma, impregna toda la vida como un fermento social, es una actividad interactiva en contexto, con roles, reglas establecidas, procesos, objetivos, entre otros. Todos los grupos culturales juegan y desarrollan juegos de tipos diferentes y en grados distintos; *6) Explicar.* Esta actividad evidencia cognición humana superior más allá de la experiencia, implica abstracción, formalización, síntesis, construcción de ideas estructuras y modelos. Respondiendo a preguntas como: ¿Cuántos?, ¿Dónde?, ¿Qué? y ¿Cómo?, explicar se ocupa con responder a la compleja pregunta ¿Por qué?

La Yupana

Procede del vocablo quechua yupay, que significa "hacer cuentas o contar" (Obeso, 2017), los investigadores coinciden que es un tablero rectangular para realizar cuentas y operaciones aritméticas utilizando piedrecillas y/o granos (quinua, maíz) movilizándolos de derecha a izquierda en el desarrollo de las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división (Espinoza, 2011); los resultados obtenidos posteriormente eran registrados en los khipus (Apaza y Atrio, 2016).

Según los primeros léxicos se denominó Yupana que en quechua quiere decir "hacer cuentas o contar" o yo hago las cuentas (Obeso, 2017). Es un tablero rectangular de cálculo matemático andino, quienes se colocaban en la parte más alta de la tabla, al lado de los casilleros con más círculos para evitar movimientos innecesariamente largos. Se trabaja con piedrecillas y granos (quinua, maíz) movilizándolos de derecha a izquierda en el desarrollo de las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división (Espinoza, 2011).
La yupana es un instrumento y un sistema de escritura, como los demás sistemas de escritura andinos (quipu, capacquipu y tocapu) integrando sus reglas de práctica y lógica que varían entre la lógica lineal y la lógica holística (Laurencich y Rossi, 2007).

Las investigaciones sobre la Yupana se han desarrollado con mayor énfasis en el presente siglo, y el resultado más valioso para el presente trabajo es el que propone Prem (2023) quien hace un análisis del uso de la Yupana por la cultura Inca para hacer operaciones matemáticas, su ideas se fundamentan en ideas esenciales de los 5 patrones básicos: ISKAY *"Abrir corto"*, KIMSA *"Abrir largo"*, PISQA *"Paqarina, nacimiento"*, KIKIN

"Equivalentes", PICHANA *"Escoba"* (p 38), a partir del análisis de los patrones propuestos, su comprobación empírica, el desarrollo de talleres con docentes y estudiantes de educación primaria, se procede a identificar los elementos esenciales para construir formalmente el sistema matemático respectivo.

La Chakana

Se deriva del vocablo quichua tawa Chakana que significa cuatro escaleras y del aimara pusi chakani que significa cuatro puentes (Morón, 2010). Es el símbolo milenario más importante de los pueblos indígenas de los Andes donde se desarrolló la cultura Inca y pre inca, fue usada como ordenador de conceptos matemáticos, religiosos, filosóficos y sociales. Como instrumento de astronomía permitió hacer predicciones acerca de las estrellas, el sol, la luna. "De la chakana o cruz andina se obtienen los días y meses del año andino, a través de la multiplicación y suma aritmética" (Conde Villareal, 2012). Gracias a estas operaciones aritméticas se han podido establecer las diferentes estaciones del año.

Suarez y Rivera (2018), proponen un juego con el uso de la Chakana, que ayuda a ejercitar la comunicación y transmisión de valores, cálculos matemáticos, creatividad, conciencia lingüística, comprensión y producción de textos, psicomotricidad, imaginación y pensamiento lógico; se desarrolla en un ambiente de sana convivencia que favorece una educación para la paz y el desarrollo del intelecto. Los autores sugieren que puede ser adaptado a otros temas de enseñanza aprendizaje como de aritmética, geometría y otras ramas de la matemática.

Para el presente ensayo, se recoge la experiencia práctica del profesor G. Cachi, docente de educación primaria, (comunicación personal, 12 de febrero de 2024) que ha diseñado el uso de la Chakana como material didáctico educativo útil en la enseñanza de las operaciones aritméticas en los primeros grados de estudio. Para comprender su propuesta y analizar sus potencialidades didácticas y científicas se ha desarrollado varios encuentros personales basados en talleres de trabajo con docentes y niños, obteniendo resultados favorables al aplicar el instrumento, evidenciando la optimización del aprendizaje e identificación de los elementos esenciales para elaborar formalmente el sistema matemático.

Hacia la formalización de las operaciones aritméticas

La matemática como ciencia, desde una visión amplia e integral según Courant y Robbins (2006), es el estudio de las estructuras abstractas, patrones y relaciones cuantitativas utilizando razonamiento lógico; además, es fundamental para el desarrollo teórico y aplicado de otras ciencias, ayuda a modelar, comprender, predecir, llegar a la esencia de los fenómenos reales o abstractos del saber humano. En esta perspectiva, Euclides (S. III a.C.)

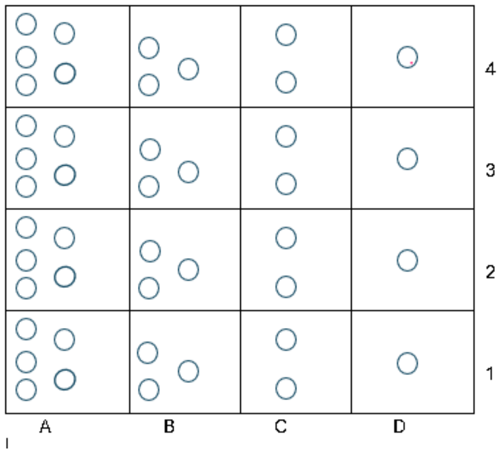
Según Levi (2006) enuncia los 5 postulados de la geometría, Peano, según Martín (2019) formaliza la teoría de números a partir de 5 postulados, Hilbert (1993) es reconocido como precursor del formalismo matemático, propone conceptos sin definición, relaciones, axiomas que cumplen la condición de consistencia e independencia. En este ensayo el aporte científico consiste en: a) Formalizar las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales utilizando objetos, concretos, visibles, manipulables como términos no definidos: (Yupana, Chakana, fichas para escribir números y escribir números en los instrumentos), b) cada sistema tiene axiomas consistentes e independientes, lenguaje formal propio, primeros teoremas demostrados, definición de las 4 operaciones aritméticas de los números naturales, además, casos específicos de aplicaciones usando postulados y teoremas en las operaciones aritméticas. De esta manera, se reconoce el valor científico del saber matemático de las culturas, ya practicado antes del acceso al mundo occidental; también queda confirmado los fines de enseñanza y aprendizaje en el sistema educativo actual, la capacidad para desarrollar operaciones matemáticas sin necesidad de conocer la matemática y su notación indo – arábiga obteniendo los mismos resultados.

Formalización de las operaciones aritméticas como sistemas matemáticos mediante la Yupana

Términos no definidos

Figura 1

La Yupana



Leyenda:
a) X: A, B, C, D , identifican las columnas de la Yupana.
b) i: 1, 2, 3, 4, identifican las filas en la Yupana.
c) Xi: Ficha ubicada columna X (A, B, C, D) y en la fila i (1, 2, 3, 4).
Sea las fichas: ●, ●, ● para escribir números.

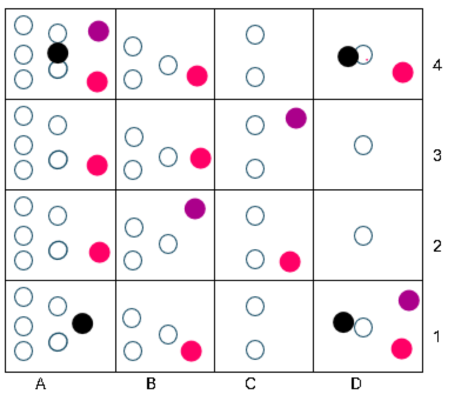
Nota. Adaptado de la imagen de la Yupana (p.259), por F. Guamán Poma de Ayala. s.f.

Tabla 1
Escritura de los números en la Yupana

0i	1i	2i	3i	4i	5i	6i	7i	8i	9i
Ninguna ficha	Di	Ci	Bi	Ai	Bi-Di	Ai-Di	Ai-Ci	Ai-Bi	Ai-Bi-Di

Nota. Escritura de números en cualquier nivel i: 1, 2, 3, 4,…
Elaboración propia.

Figura 2
Aplicaciones específicas



Nota. Tres números escritos.

Tabla 2
Notación numérica.

Ficha	Nivel	Número	Notación
●	1	1	D1
	2	3	B2
	3	2	C3
	4	5	A4
	Todo el número	5231	A4,C3,B2,D1
Ficha	Nivel	Número	Notación
●	1	4	D1-B1
	2	7	C2-A2
	3	8	B3 -A3
	4	9	D4-B4-A4
	Todo el número	9874	A4-B4-D4,B3-A3,C2-A2, D1-B1
Con la ficha ● está escrito el número 6006			

Nota. Notación numérica.

Axiomas (A)

En el nivel i: 1, 2, 3, 4, 5…

Y1: Axioma del **uno:** DiDi ←→ Ci

En el nivel i: dos fichas en Di equivale a una ficha en Ci y viceversa.

Y2: Axioma de **barrido** (pichana)

Y2a: Di-Ci ←→ Bi

En el nivel i: una ficha en Di y una ficha en Ci equivale a una ficha en Bi y viceversa.

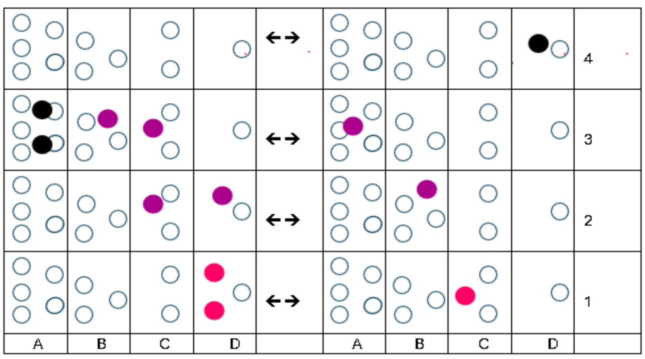
Y2b: Ci-Bi←→ Ai

En el nivel i: una ficha en Ci y una ficha en Bi equivale a una ficha en Ai y viceversa.

Y3: Axioma de **cambio de nivel:** AiAi←→ Di+1

En el nivel i: dos fichas en Ai equivale a una ficha en Di+1 (nivel siguiente) y viceversa.

Figura 3
Representación de los axiomas



Nota. Representación de los axiomas.
Y1: Ficha ●, nivel 1: dos dichas en D1 equivale a una ficha en C1 y viceversa.
Y2a: Ficha ●, nivel 2: ficha en D2 y ficha en C2 equivale a ficha en B2 y viceversa.
Y2b: Ficha ●, nivel 3: ficha en C3 y ficha en B3 equivale a ficha en A3 y viceversa.
Y3: Ficha ● , nivel 3: dos fichas en A3 equivale a una ficha en D4 y viceversa

Definiciones de las operaciones aritméticas

Adición

a) Escribir sumandos.
b) Aplicar axiomas.
c) Leer resultado.

Sustracción

a) Escribir minuendo y sustraendo.
b) Aplicar axiomas al minuendo hasta encontrar pares de valores equivalentes con el sustraendo.
c) Eliminar los pares de valores equivalentes identificados de minuendo y sustraendo.
d) Leer el resultado.

Multiplicación

a) Escribir multiplicando y multiplicador.
b) Escribir el multiplicando tantas veces indica el multiplicador.
c) Aplicar axiomas a lo obtenido en b).
d) Leer el resultado.

División

a) Escribir dividendo y divisor.
b) Aplicar axiomas al dividendo para identificar las veces que contiene al divisor.
c) Leer la cantidad de números encontrados, incluyendo residuo, si existe.

Teorema de simplificación de procesos

Ta: DiDiDi ⇔ Bi: Tres fichas en D1 equivalen a una ficha en Bi y viceversa.
Tb: DiDiDiDiDi ⇔ Ai: 5 fichas en Di equivalen a una ficha en Ai y viceversa.
Tc: CiCi ⇔ Bi-Di: Dos dichas en Ci equivalen a una ficha en Di y una ficha en Ci y viceversa.

Td: BiBi ⇔ Ai-Di: Dos dichas en Bi equivalen a una ficha en Di y una ficha en Ai y viceversa.
Te: XiXiXiXiXiXiXiXiXiXi ⇔Xi+1: 10 fichas en Xi equivalen a una ficha en la misma columna, siguiente nivel y viceversa.

Demostración:

Ta: - Dado DiDiDi →Ci – Di (Y1)→ Bi (Y2a)
- Dado: Bi →Ci-Di (Y2a) →DiDiDi (Y1)
- Por tanto: DiDiDi ⇔ Bi

Tb: - Dado DiDiDiDiDi → Bi- DiDi (Ta) → Bi- Ci → Ai (Y2b)
- Dado Ai → Bi-Ci (Y2b) → Bi – DiDi (Y1) → DiDiDiDiDi (Ta)
- Por tanto: DiDiDiDiDi ⇔ Ai

Tc: - Dado CiCi → Ci-DiDi (Y1) → Bi-Di (Y2a)
- Dado Bi-Di →(Y2a); Ci- DiDi → CiCi (Y1)
- Por tanto: CiCi ⇔ Bi-Di

Td: - Dado BiBi ➔ DiDiDiDiDiDi (Ta) ➔ Ai – Di (Tb)
- Ai-Di ➔ DiDiDiDiDiDi (Tb)➔ BiBi (Ta)
Por tanto BiBi ⟵➔ Ai-Di
Te: En la columna D
- Dado DiDiDiDiDiDiDiDiDiDi ➔ AiAi (Tb) ➔ Di+1 (Y3)
- Dado Di+1 ➔ AiAi (Y3) ➔ DiDiDiDiDiDiDiDiDiDi (Tb)
Por tanto: DiDiDiDiDiDiDiDiDiDi ⟵➔ Di+1

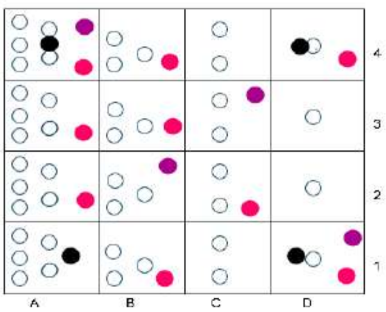
Aplicación del sistema a casos específicos
Adición. Sumar: 6006+ 9874+5231
a. Escribir los tres números: 6006: ● ; 9874: ● ; 5231: ● (figura 4)
b. Aplicar los axiomas en cualquier nivel. Se aplica una transformación en cada nivel, sin considerar ningún orden (Figura 5).
 1. Nivel 2: B2-C2➔ A2
 2. Nivel 1: D1D1 ➔C1
 3. Nivel 4: D4D4 ➔C4
 4. Nivel 3: C3-B3 ➔A3

 Aplicación de axiomas en la figura 5
 1. Nivel 4: B4-C4➔ A4
 2. Nivel 1: C1-B1 ➔A1
 3. Nivel 2: A2A2 ➔D3
 4. Nivel 3: A3A3 ➔D4 Ver figura 6

 Se observa que en A4 hay 4 fichas, para operar se requiere incrementar el nivel 5. Además, en los niveles 2 y 3 no es posible aplicar transformaciones.
 1. Nivel 1: A1A1➔ D2
 2. Nivel 4: A4A4➔D5; A4A4 ➔ D5
 3. Nivel 5: D5D5➔C5

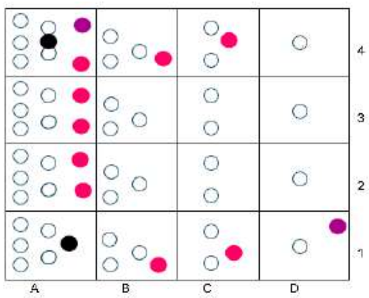
 Resultado final: 2555. (figura 7)

Figura 4.
Escritura de números



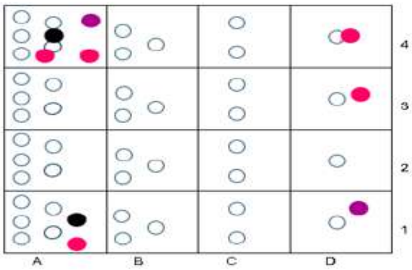
Nota. Números escritos.

Figura 5
Aplicación de axiomas



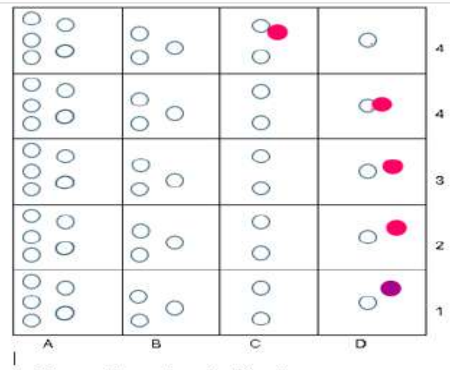
Nota. Aplicación de axiomas.

Figura 6.
Aplicación de axiomas



Nota. *Aplicación de axiomas*

Figura 7.
Resultado final



Nota. *Resultado final.*

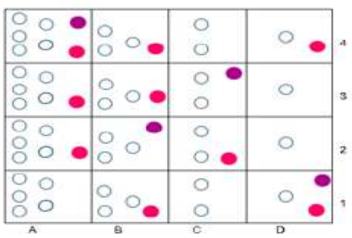
Sustracción. Restar: 9874 - 5231

a. Escribir los dos números: 9874: ; 5231: (figura 8)

b. Eliminar pares de fichas diferentes en la misma fila y columna: D1 y A4. Resultado en la figura 9.

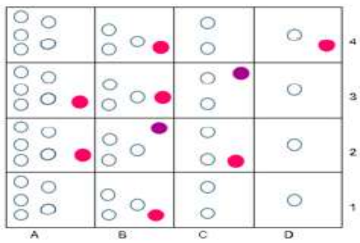
   1. Nivel 3: B3 → C3-D3
   2. Nivel 2: A2 →B2-C2 (figura 10)

Figura 8.
Escritura de números.



Nota. *Números escritos*

Figura 9.
Resultado.



Nota. *Resultado de eliminar fichas*

En la figura 10, eliminando pares de fichas diferentes en la misma fila y columna: B2 y C3 C2C2→ B2-D2.
Resultado final: 4643 (figura 11)

Figura 10
Aplicando axiomas

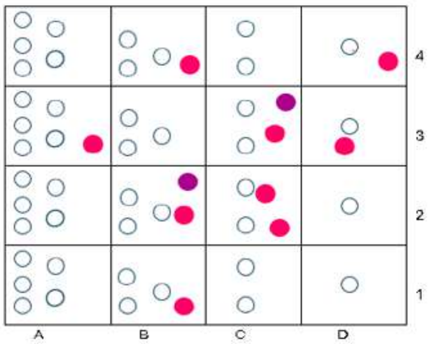
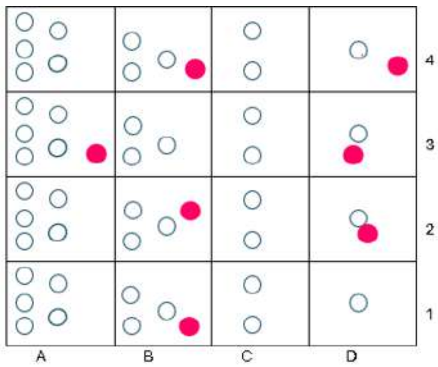


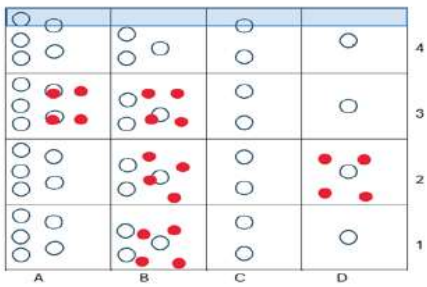
Figura 11
Resultado final



Multiplicación. Multiplicar 843x4
Paso 1: Escribir 4 veces el número 843.
Paso 2: Aplicando axiomas en la figura 12.

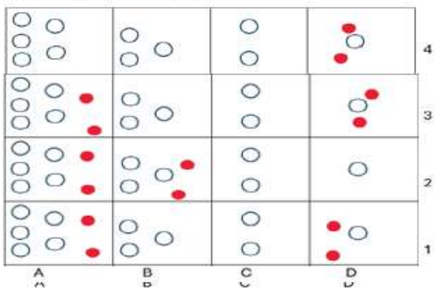
1. Nivel 3: A3A3➔ D4; A3A3 ➔D4; B3B3➔A3-D3; B3B3➔ A3-D3
2. Nivel 2: B2B2➔A2-D2; B2B2➔A2-D2; D2D2D2➔ B2; D2D2D2➔ B2
3. Nivel 1: B1B1➔A1-D1; B1B1 ➔A1-D1

Figura 12.
Escritura de números.



Nota. Números escritos

Figura 13.
Aplicando axiomas.



Nota. Resultado preliminar

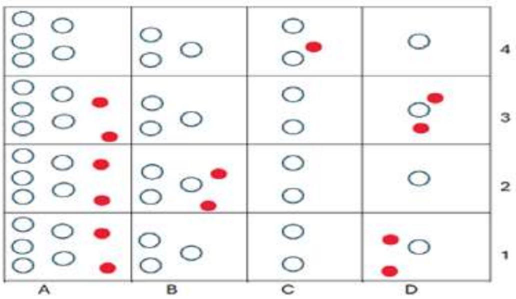
Paso 3: Aplicando axiomas (figura 13).

1. Nivel 1: A1A1 ➔D2; D1D1➔C1
2. Nivel 3; A3A3 ➔ D4; D3D3➔ B3
3. Nivel 2: A2A2➔ D3; B2B2 ➔ A2-D2 (figura 14)

Paso 4: Aplicando axiomas (figura 14).

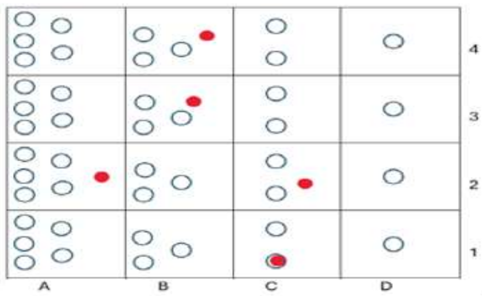
1. Nivel 2; D2D2➔ C2
2. Nivel 3: D3-C3 ➔ B3
3. Nivel 4: D4-C4 ➔ B4 Resultado: 843x4 = 3372 (figura 15).

Figura 14.
Aplicando axiomas.



Nota. *Resultado preliminar*

Figura 15.
Aplicando axiomas.



Nota. *Resultado final*

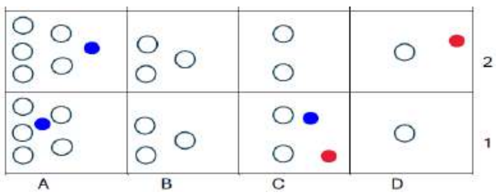
División. Dividir 57 entre 12

Paso 1: Dividendo 57 Divisor 12 (figura 16)

Paso 2: Aplicando Axiomas y teoremas en la figura 16

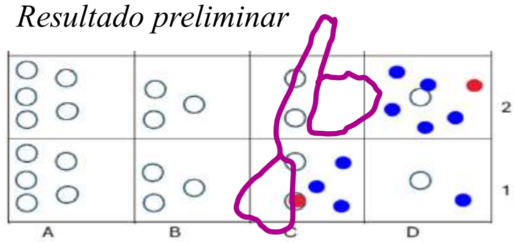
1. Nivel 2: A2➔ D2D2D2D2D2D2
2. Nivel 1: A1➔ B1-C1; B1➔ C1- D1 (figura 17)

Figura 16
Escritura de números



Nota. Números escritos.

Figura 17
Resultado preliminar



Nota. Resultado preliminar.

Paso 3: El número 12 cuántas veces está contenido en el número 57 (figura 17)

Se ha formado 3 grupos de 12.

Paso 4: Aplicando axiomas en la figura 18

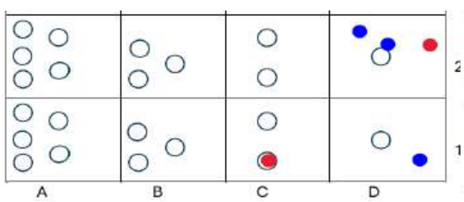
1. Nivel 2: D2 ➔ A1A1
2. Nivel 1; A1 ➔ B1-C1

Se forma un grupo de 12

Quedando el siguiente residuo: 9 (figura 19)

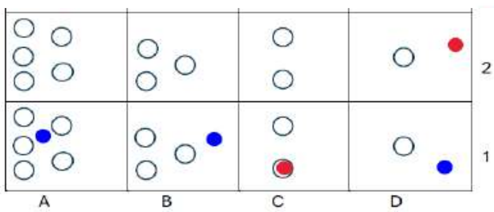
Por tanto: 57 entre 12 es 4, con residuo 9

Figura 18
Aplicación de axiomas



Nota. Aplicación de axiomas.

Figura 19
Resultado final



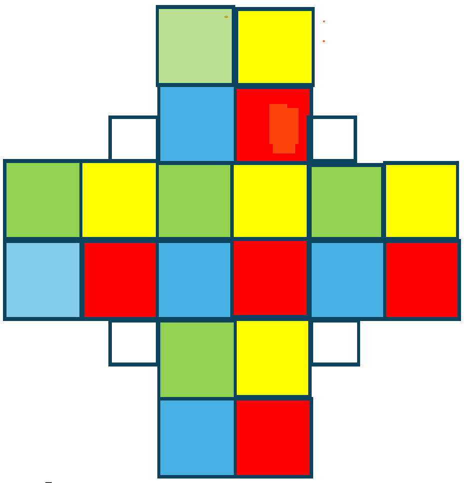
Nota. Resultado final.

Formalización de las operaciones aritméticas como sistemas matemáticos mediante la Chakana

Términos no definidos

Figura 20

La Chakana



Leyenda:

a) Existen 5 Niveles i: 1, 2, 3, 4 y 5.

b) Los niveles están ordenados sucesivamente en sentido de las agujas del reloj. El primer nivel está ubicado a la derecha, el nivel 5 en el centro.

c) Cada nivel tiene 4 cuadrados, ordenados en sentido de las agujas del reloj. El primer cuadrado es verde (Ve), los siguientes son: amarillo (Am), rojo (Ro) y azul (Az), en ese orden.

Sean : ● , ● , ● , fichas para escribir números.

Escritura de números: En el nivel i: 1, 2, 3, 4, 5

Nota. Adaptado de la imagen chakana (p.4), por Suárez y Rivera (2018).

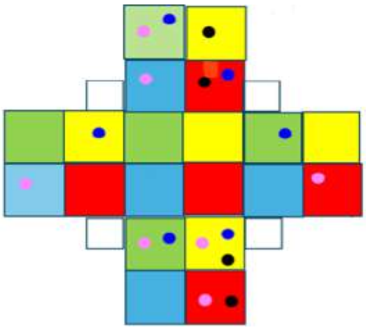
Tabla 3

Escritura de números

0i	1i	2i	4i	8i	5i	6i	7i	9i	3i
Sin ficha	Vei	Ami	Roi	Azi	Vei-Roi	Ami-Roi	Vei-Ami-Roi	Azi-Vei	Vei-Ami

Nota. Tabla que muestra la escritura de números. Elaboración propia.

Aplicaciones específicas
Figura 21
Escritura de números



Nota. Escritura de números específicos.

Tabla 4
Escritura de números

Ficha	Nivel	Número	Notación	Ficha	Nivel	Número	Notación
	1	1	Ve1		1	4	Ro1
	2	3	Ve2-Am2		2	7	Ve2-Am2-Ro2
	3	2	Am3		3	8	Az3
	4	5	Ve4-Ro4		4	9	Az4-Ve4
	Todo el número	5231	Ve4-Ro4, Am3, Ve2-Am2,Ve1		Todo el número	9874	Az4-Ve4, Az3, Ve2-Am2-Ro2,Ro1
Con la ficha está escrito el número: 6060: Ro4-Am4, Ro2-Am2. Por tanto, se ha escrito los números: 5231, 9874, 6006.							

Nota. Notación de escritura de números. Elaboración propia.

Axiomas.
En el nivel i: 1, 2, 3, 4, 5.
Ch1: **Del uno**: Vei, ficha en verde, nivel i.
Ch2: **Del valor siguiente:** El siguiente cuadrado tiene valor doble del anterior, siguiendo el orden de las agujas del reloj. Viceversa: el cuadrado anterior tiene valor la mitad del cuadrado dado.

Ami ←→VeiVei, ficha amarilla equivale a dos fichas verdes.
Roi←→ AmiAmi, ficha roja equivale a dos fichas amarillas.
Azi←→RoiRoi, ficha azul equivale a dos fichas rojas.

Ch3: **De cambio de nivel:** Azi-Ami ←→Vei+1, ficha azul y ficha amarilla en nivel i es ficha verde en el siguiente nivel.
Teorema simplificación de procesos
Ta: AmiAmiAmiAmi ← →Azi
Tb: VeiVeiVeiVei ← →Roi
Tc: VeiVeiVeiVeiVeiVeiVeiVei ← → Azi
Demostración

Ta: AmiAmiAmiAmi ← →Azi
AmiAmiAmiAmi →RoiRoi (Ch2) → Azi (Ch2)
Azi → RoiRoi (Ch2) → AmiAmiAmiAmi (Ch2)
Por tanto: AmiAmiAmiAmi ← →Azi
Tb: VeiVeiVeiVei ← →Roi
VeiVeiVeiVei → AmiAmi (Ch2) → Roi (Ch2)
Roi → AmiAmi (Ch2) → Vei VeiVeiVei (Ch2)
Por tanto: VeiVeiVeiVei ← →Roi
Tc: VeiVeiVeiVeiVeiVeiVeiVei ← → Azi
VeiVeiVeiVeiVeiVeiVeiVei → RoiRoi (Tb) →Azi (Ch2)
Azi → RoiRoi (Ch2) → VeiVeiVeiVeiVeiVeiVeiVei (Tb)
Por tanto: VeiVeiVeiVeiVeiVeiVeiVei ← →Azi

Definiciones de las operaciones aritméticas
Adición
a) Escribir sumandos.
b) Aplicar axiomas.
c) Leer resultado.

Sustracción
a) Escribir minuendo y sustraendo.
b) Aplicar axiomas al minuendo para encontrar valores equivalentes con el sustraendo.
c) Eliminar los pares equivalentes identificados de minuendo y sustraendo.
d) Leer resultado.

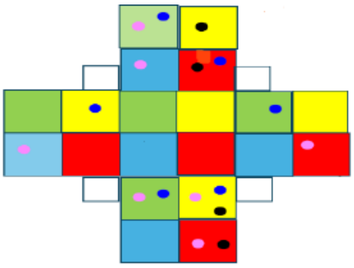
Multiplicación
a) Escribir multiplicando y multiplicador.
b) Escribir el multiplicando tantas veces indica el multiplicador.
c) Aplicar axiomas a lo obtenido en b).
d) Leer resultado.

División
a) Escribir dividendo y divisor.
b) Aplicar axiomas al dividendo identificando las veces que contiene al divisor.
c) Leer la cantidad de números encontrados en b), incluyendo residuo, si existe.

Aplicación del sistema a casos específicos
Adición. Sumar: 9874+ 5231 + 6060.
Escribir los Números. 9874 , 5231 +6060 . (figura 22)

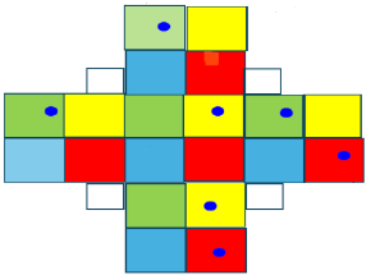
1. Nivel 4: Ro4Ro4→Az4; Ve4Ve4→Am4; Am4-Az4 → V5; Am4-Az4→Ve5
2. Nivel 2: Ro2Ro2→Az2; Am2Am2→Ro2; Az2-Am2 →Ve3; Ve2Ve2 →Am2
3. Nivel 5: Ve5Ve5→Am5
4. Nivel 3: Az3-Am3 → Ve4
5. Resultados: 21165. (figura 23)

Figura 22
Escritura de números



Nota. Escritura de los números.

Figura 23
Resultados

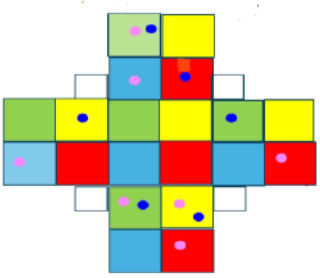


Nota. Resultado.

Sustracción. Restar: 9874 – 5231
Escribir los Números Minuendo: 9874 , Sustraendo 5231 (figura 24)
Paso 1**:** Eliminar los pares de fichas diferentes en un solo cuadrado: Ve4Ve4, Ve2Ve2, Am2Am2, el resultado se muestra en la figura 25.
Paso2**:** Operando en la figura 25

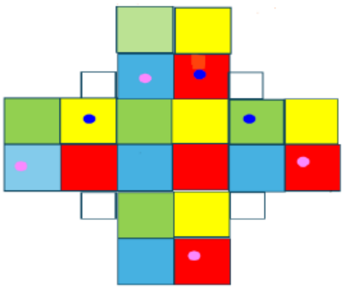
1. Nivel 1: Ro1→ Am1Am1; Am1→ Ve1Ve1
2. Nivel 4: Az4→ Ro4Ro4
3. Nivel 4; Az3→Ro3Ro3; Ro3→Am3Am3
4. Eliminar parejas de fichas diferentes en el mismo cuadrado
5. Resultado: 9874 – 5231= 4643. (figura 26)

Figura 24
Escritura de números



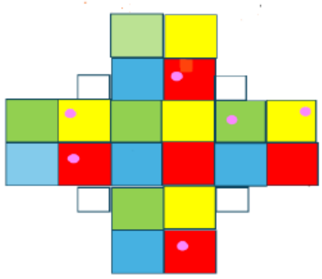
Nota. Escritura de números.

Figura 25
Aplicación de axiomas



Nota. Aplicación de axiomas.

Figura 26
Resultados



Nota. Resultado.

Multiplicación. Multiplicar: 863 x 4
Escribir 4 veces el número 863 (figura 27)
Paso1: Aplicar axiomas.

1. Nivel 3: Az3→Ro3Ro3; Ro3→ Am3Am3; Ro3→ Am3Am3
2. Nivel 2: Ro2Ro2→ Az2; Ro2Ro2→Az2
3. Nivel 1: Am1Am1 →Ro1; Am1Am1→Ro1; Ro1Ro1→Az1: Ve1Ve1→Am1; Ve1Ve1→Am1
   Resultado en la figura 28

Paso 2: Aplicar axiomas.

1. Nivel 3: Az3-Am3 → Ve4; Az3-Am3 → Ve4; Az3-Am3 → Ve4
2. Nivel 2: Az2-Am2 → Ve3; Az2-Am2 → Ve3
3. Nivel 1: Az1-Am1 → Ve2

   Resultado: Figura 29

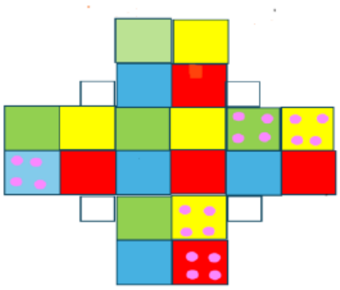
Paso 3: Aplicar Axiomas

1. Nivel 4: Ve4Ve3→Am4
2. Nivel 3: Ve3Ve3→Am3; Am3Am3→Ro3

Resultado: 863x4= 3452. figura 30

Figura 27

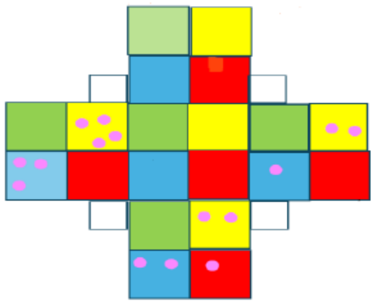
Escritura de números



Nota. Escritura de números.

Figura 28

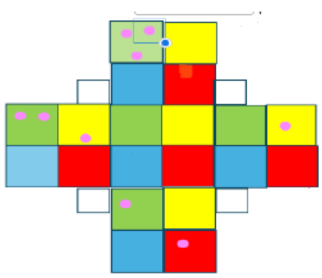
Aplicación de axiomas



Nota. Aplicación de axiomas.

Figura 29

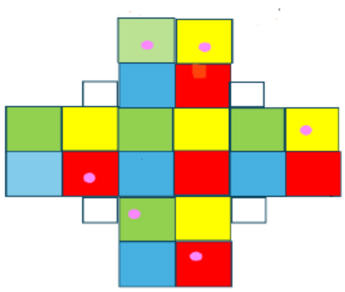
Aplicación de axiomas



Nota. Aplicación de axiomas.

Figura 30

Resultados



Nota. Resultado.

División. Dividir: 57 entre 12. (figura 31)

A partir del Número 57, cuántos grupos de 12 se puede formar

Paso 1: figura 32

1. Nivel 1: Ro1→ Am1Am1
2. Nivel 2: Ro2→ Am2Am2; Am2→Ve2Ve2; Am2→Ve2Ve2

Paso 2: Se extrae tres grupos de 12. (figura 33)

Paso 3: Aplicar: Nivel 2: Ve2→ az1-am1

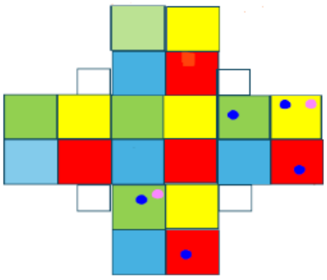
Paso 4: Se forma otro grupo de 12, ya se tiene 4 grupos de 12

Queda en la Chakana Az1-Ve1= 9

Por tanto, 57 entre 12 es 4 con residuo 9. figura 34

Figura 31

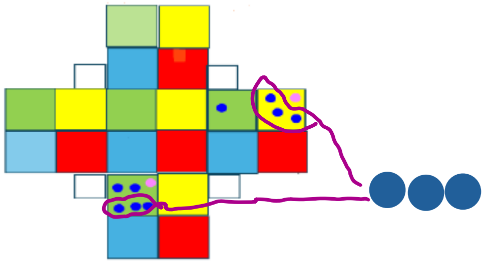
Escritura de números



Nota. Escritura de números.

Figura 32

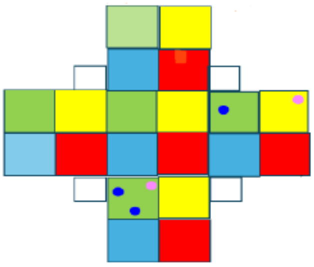
Aplicación de axiomas



Nota. Aplicación de axiomas.

Figura 33

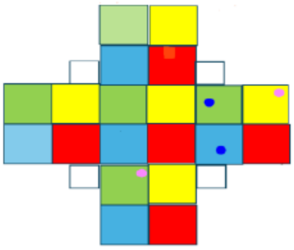
Aplicación de axiomas



Nota. Aplicación de axiomas.

Figura 34

Resultado



Nota. Resultado.

Conclusión

Se ha formalizado las operaciones aritméticas como sistemas matemáticos haciendo uso de la Yupana y la Chakana: adición, sustracción, multiplicación y división. En cada sistema matemático se ha considerado el uso de lenguaje propio, simbolización, términos no definidos, axiomas, teoremas, aplicaciones a casos específicos. Cada sistema está en constante construcción de nuevos teoremas, corolarios, definiciones y otras operaciones aritméticas, considerando procesos lógicos deductivos debidamente fundamentados.

Los dos materiales didácticos educativos concretos, permiten operar las cuatro operaciones básicas en forma lúdica y divertida. En la experiencia de talleres de aprendizaje, los axiomas se enuncian y practican empíricamente, no se usa el lenguaje formalizado existente, docentes y estudiantes comprenden y aplican exitosamente de forma autónoma y en pequeños grupos, generalmente de dos. Apoyan a los estudiantes de forma concreta y visual, brindan oportunidades para comprender conceptos abstractos, desarrollar el pensamiento matemático, la generación autónoma de algoritmos, patrones y relaciones. El estudio es relevante porque permite la recuperación científica, histórica y cultural de las civilizaciones antiguas peruanas (cultura Inca y pre inca), valorando la importancia de la matemática desarrollada en las diferentes culturas y contextos ancestrales.

Referencias

Apaza, H., y Atrio, S. (2016). *Las cantidades en la Yupana desde una perspectiva cultural andina: una experiencia en aulas de primer y segundo grado de primaria*. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *5*(2), 36-49. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2016.36-49

Bishop, A. (1988). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Temas de educación. Paidós.

Conde Villareal, E. (1 de Julio de 2012). *Caminos de Wayra.* https://caminoswayra.wordpress.com/2012/07/01/chakana-y-matematicaandina/

Courant, R. y Robbins, H. (2006). *¿Que son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales* (1a.ed.). México: Fondo de cultura económica.

Espinoza, W. (2011). *Los Incas. Economía y sociedad en la era del Tahuantinsuyo*. Amaru.

Guamán Poma de Ayala, F. (s.f.). *Nueva crónica y buen gobierno.* https://biblioteca.clacso.edu.ar/clacso/se/20191121014717/Nueva_coronica_y_buen_gobierno_1.pdf

Hilbert, D. (1993). *Fundamentos de las matemáticas*. (1a.ed.). México: Mathema.

Laurencich, L., y Rossi, E. (2007). *La Yupana de la Nueva Crónica y las Yupanas de Exsul Imneritus.* Revista Blas Valera Populo Suo. 375-422.

Levi, L. (2006). *Leyendo a Euclides*. (3a ed.). Buenos Aires.

Martín, R. 2019). *Introducción a la lógica y teoría axiomática de conjuntos. Construcción del conjunto de los números naturales*. Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias.

Moron, E. (2010). *La Chakana como elemento posibilitador de la integración latinoamericana.* https://www.academia.edu/113634740/La_Chakana_como_elemento_posibilitador_de_la_integraci%C3%B3n_latinoamericana?uc-sb-sw=42670945

Obeso, R. (2017). *El uso de la Yupana en el aprendizaje de las cuatro operaciones básicas en los alumnos del tercer grado de primaria de la I.E. 80 006 "Nuevo Perú" Urbanización Palermo.* (*Tesis de Licenciatura*). Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo.

Prem, D. (2023). *Yupana Inca Tawa Pukllay (YITP):* Recuperando la matemática Inka después *de 500 años.* Libros & Ciencias N°6.

Scott, P. (2021). *La contribución intelectual de Ubiratan D'Ambrosio a las Etnomatemáticas*. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* 285-293. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/49203/48975

Suárez, I. y Rivera, D. (2018). *Juego Matemático en la chakana.* https://es.scribd.com/document/380961444/Juego-Matematico-en-la-Chakana-Chakanapi-Yupaywan-Pukllana